Análisis Matemático II — UTN-FRBA

Prof. Lezcano

Curso anual — Segundo Parcial — Tema 1

Apellido y nombre: Curso:

T1	T2	P1	P2	P3	P4	Califcación

Para aprobar los TP, deben estar bien al menos dos ejercicios prácticos (los teóricos no son tenidos en cuenta) esto equivale a una calificación de 6. Para aspirar a aprobación directa es necesario tener al menos cuatro ejercicios bien, uno de ellos un teórico. Esto equivale a una calificación de 8D.

Ejercicios teóricos

T1. Defina campo vectorial conservativo y función potencial.

Determine si el campo $\vec{f}(x,y) = (2xy + \cos(x), x^2 + 3y^2)$ es conservativo y en caso afirmativo encuentre una función potencial.

T2. Enuncie el teorema de Green y utilícelo, con un campo vectorial conveniente, para calcular el área de la región encerrada por la curva simple cerrada parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (t^3 - 4t, 16 - t^4)$, $-2 \leq t \leq 2$.

Ejercicios prácticos

P1. Calcule la masa de una chapa con forma de la superficie definida por $S : z = x^2 + y^2$, $1 \leq z \leq 4$, sabiendo que la función densidad es $\delta(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$.

P2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 . Calcule la circulación de

$$\vec{f}(x,y,z) = \big(y^2 + g(x), y + g(y), x + z\big)$$

a lo largo de la curva borde de la superficie $S : z = 4 - x^2$, $y \leq 5$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ orientada en sentido $(2,0,0) \to (2,5,0) \to (0,5,4) \to (0,0,4) \to (2,0,0)$.

P3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^2 y $\vec{f}(x,y,z) = (g'(x), 4yg(x), 8xz + 3)$.

a) Halle g tal que $\operatorname{div} \vec{f}(x,y,z) = 4$ y $\vec{f}(0,1,1) = (4,4,3)$.

b) Con la función g hallada en a), calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie $S : z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ orientada con vectores normales con tercera componente positiva.

P4. Calcule la circulación de $\vec{f}(x,y,z) = (-y, x, z)$ a lo largo de la curva C definida por la intersección de las superficies $S_1 : x^2 + z^2 = 9$ y $S_2 : x + y = 3$ en el primer octante. Indique claramente la orientación elegida para el cálculo.

AM2	2° parcial - Modelo Prof. Lezcano	HOJA N° 1/3 FECHA 2026

[T1] Definir campo vectorial conservativo y función potencial

Determinar si el campo $\bar{f}(x,y) = (2xy + \cos(x),\ x^2 + 3y^2)$ es conservativo. En caso afirmativo, hallar una función potencial

Campo vectorial conservativo

Sea $\bar{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si $\bar{F} \in C^1$ en todo punto del dominio

$Dom(f)$ un conj. simplemente conexo

$rot(\bar{F}) = \bar{0}$

Entonces $\bar{F}$ es campo conservativo → independencia del camino

→ $\exists \varphi \ / \ \bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$ → φ función potencial

→ $\oint_C \bar{F}\,d\bar{l} = 0$

$$\bar{f}(x,y) = (\overbrace{2xy + \cos(x)}^{P},\ \overbrace{x^2 + 3y^2}^{Q})$$

$\bar{F} \in C^1$: los componentes son suma algebraicas de funciones elementales ✓

$Dom(\bar{F}) = \mathbb{R}^2$ → simplemente conexo ✓

¿$P'_y = Q'_x$? → $\left.\begin{array}{l} P'_y = 2x \\ Q'_x = 2x \end{array}\right\} = ✓$

$\bar{F}$ es campo conservativo $\exists \varphi \ / \ \bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$

$$\underbrace{\bar{F} = (P, Q), \quad \bar{\nabla}\varphi = (\varphi'_x, \varphi'_y)}_{\bar{F} = \bar{\nabla}\varphi}$$

$$\begin{cases} \varphi'_x = 2xy + \cos(x) \xrightarrow{\text{integro en } x} \varphi(x,y) = x^2 y + \text{sen}(x) + \alpha(y) \\ \varphi'_y = x^2 + 3y^2 \ (*) \end{cases}$$

$\hookrightarrow \varphi'_y = \underbrace{x^2 + \alpha'(y) \overset{(*)}{=} x^2 + 3y^2}$

$\alpha'(y) = 3y^2 \to \alpha(y) = y^3 + C$

Piden UNA función potencial tomo $C = 0$

$$\boxed{\varphi(x,y) = x^2 y + \text{sen}(x) + y^3}$$

NOTA

T2 Enunciar el teorema de Green y utilizarlo, con un campo vectorial conveniente, para calcular el área de la región encerrada por la curva simple cerrada parametrizada por

$$\bar{\alpha}(t) = \left(t^3 - 4t, 16 - t^4\right) \quad -2 \leq t \leq 2$$

$$\alpha'(t) = \left(3t^2 - 4, -4t^3\right)$$

- D: una región compacta de $\mathbb{R}^2$
- C: curva frontera de D, suave a trozos con orientación +
- $\bar{F} = (P, Q) \in C^1$

$$\Rightarrow \oint_{C^+} \bar{F} d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx dy$$

$$\text{Área}_D = \iint_D dx dy$$

con un campo tal que $Q'_x - P'_y = 1$ hallo el área encerrada por la curva

$\bar{F}(x,y) = (0, x)$ cumple

$$A_D = \iint_D dx dy \overset{\text{Green}}{=} \oint_{C^+} \bar{F}(\bar{\alpha}(t)) \, \bar{\alpha}'(t) \, dt =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(0, t^3 - 4t\right)\left(3t^2 - 4, -4t^3\right) dt =$$

$$= \int_{-2}^{2} -4t^6 + 16t^4 \, dt = \frac{2048}{35}$$

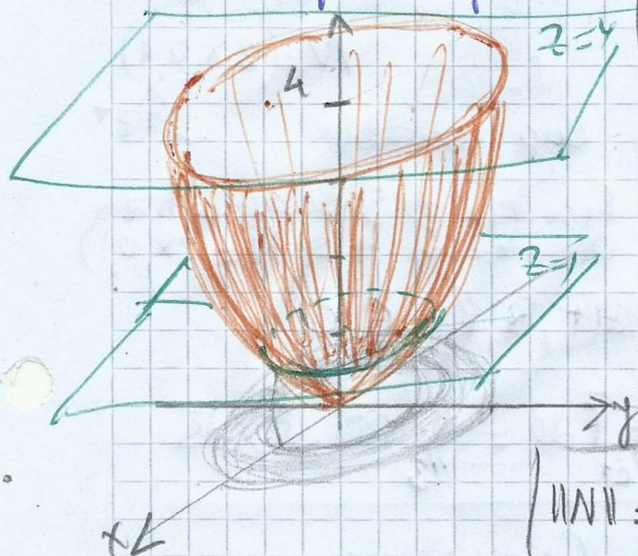
$$\boxed{A_D = \frac{2048}{35}}$$

AM2	2º parcial – Modelo Prof. Lezcano	HOJA Nº 2/3 FECHA 2026

(P1) Calcular la masa de una chapa con forma de la superficie definida por:

$$S: z = x^2 + y^2 \;,\; 1 \le z \le 4$$

sabiendo que la función densidad es $\delta_{(x,y,z)} = \dfrac{z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$

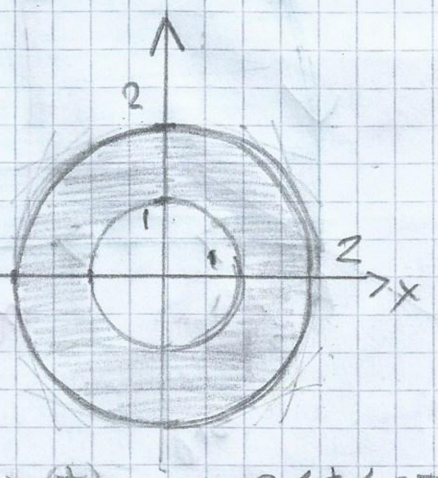


Analizo proyección en x, y

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2+y^2 \\ 1 \le z \le 4 \end{array}\right\} \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4$$

$$\boxed{N = (2x, 2y, -1)}$$

$$\boxed{\|N\| = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}}$$



$$\text{Masa}_S = \iint_S \delta(x,y,z)\, dS =$$

$$= \iint_{S_{xy}} \frac{z}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \|N\|\, dx\,dy = \quad \begin{cases} x = r\cos(t) & 0 \le t \le 2\pi \\ y = r\,\text{sen}(t) & 1 \le r \le 2 \\ z = r^2 \end{cases}$$

$$= \iint_{S_{xy}} \frac{z}{\cancel{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}} \cdot \cancel{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} \overbrace{x^2+y^2}^{z}\, dx\,dy =$$

c.v.

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \overset{\swarrow \text{Jac}}{r}\, r^2\, dr\,dt = \cancel{2}\pi \cdot \frac{r^4}{\cancel{4}_{\,2}}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}(16-1) = \frac{15}{2}\pi$$

$$\boxed{\text{Masa} = \frac{15}{2}\pi}$$

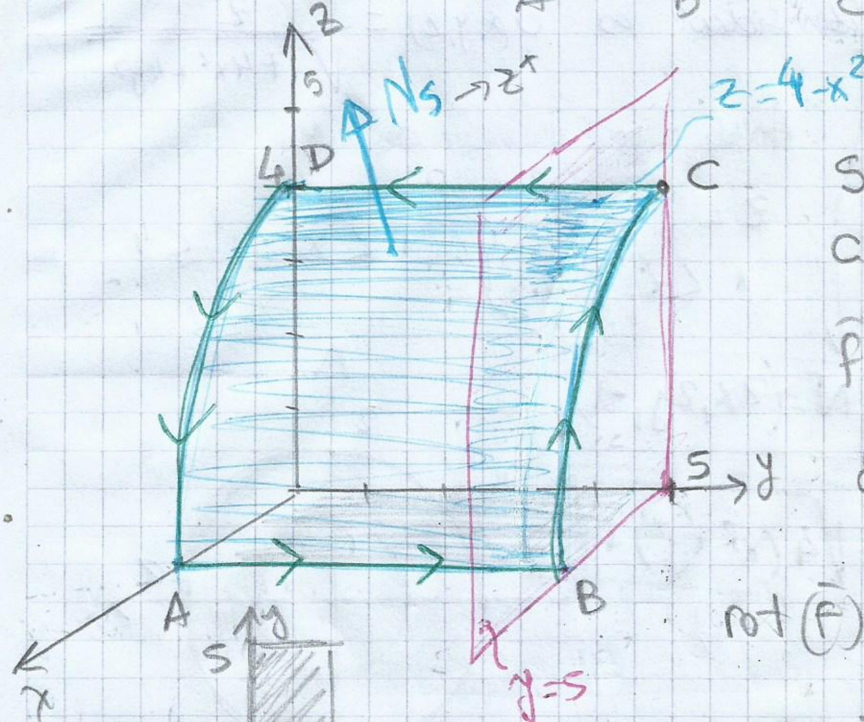
NOTA

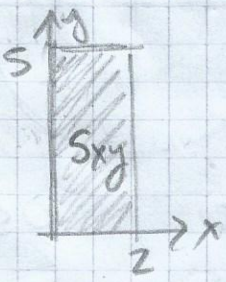
P2) Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1. Calcular la circ. de

$$\bar{F}(x,y,z) = (\underbrace{y^2 + g(x)}_{P}, \underbrace{y + g(y)}_{Q}, \overbrace{x+z}^{R})$$

a lo largo de la curva borde de la sup. $S: \boxed{z = 4 - x^2}, \; y \leq 5, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0$

orientada en sentido $\underset{A}{(2,0,0)} \to \underset{B}{(2,5,0)} \to \underset{C}{(0,5,4)} \to \underset{D}{(0,0,4)} \to \underset{A}{(2,0,0)}$





$N = (2x, 0, 1)$ $\uparrow z^+$

S: sup orientable

C frontera de S suave a trozos orientación + si $N = (2x, 0, 1)$

$\bar{F} = (P, Q, R) \in C^1$

$$\oint_{C^+} \bar{F} \, d\bar{l} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar{F}) \, d\bar{S}$$

$$\operatorname{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (0-0, 0-1, 0-2y)$$

$$\operatorname{rot}(\bar{F}) = (0, -1, -2y)$$

$$\oint_{C^+} \bar{F} \, d\bar{l} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar{F}) \, d\bar{S} = \iint_{S_{xy}} \operatorname{rot}(\bar{F}) \, N \, dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 \int_0^5 (0, -1, -2y)(2x, 0, 1) \, dy\,dx = \int_0^2 \int_0^5 -2y \, dy\,dx =$$

$$= -\int_0^2 y^2 \Big|_0^5 dx = -\int_0^2 25 \, dx = -25 \times 2 = -50$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F} \, d\bar{l} = -50}$$

NOTA

P3) Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^2 y $\bar{f}(x,y,z) = (g'(x),\ 4y\,g(x),\ 8xz+3)$

a) Hallar g tal que $\operatorname{div}(\bar{f}) = 4$ y $\bar{f}(0,1,1) = (4,4,3)$

$\bar{F} = (P,Q,R) \Rightarrow \operatorname{div}(\bar{f}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 4$

$\Rightarrow g''(x) + 4\,g(x) + 8x = 4$

$y = g(x) \Rightarrow y'' + 4y = 4 - 8x$

SH) $y'' + 4y = 0$; $z = a \pm bj$; $a = 0$

$r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r_1 = 2j,\ r_2 = -2j \rightarrow \boxed{y_H = A\cos(2x) + B\,\text{sen}(2x)}$

SP) $y_P = Cx + D \rightarrow y' = C \rightarrow y'' = 0$

$\underbrace{0}_{y''} + 4\underbrace{(Cx + D)}_{y} = -8x + 4$

$4Cx + 4D = -8x + 4$ $\quad C = -2,\ D = 1 \quad \boxed{y_P = -2x + 1}$

$y_G = A\cos(2x) + B\,\text{sen}(2x) - 2x + 1 \longrightarrow g(0) = 1 = A + 1 \rightarrow \boxed{A = 0}$

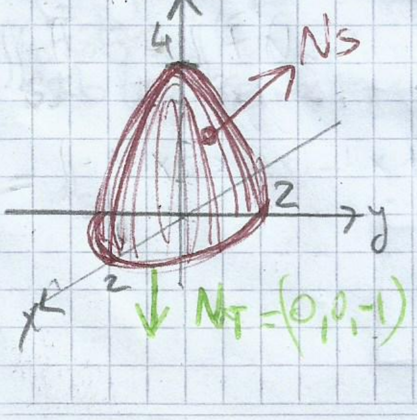
$y'_G = -2A\,\text{sen}(2x) + 2B\cos(2x) - 2 \longrightarrow g'(0) = 4 = 2B - 2 \rightarrow \boxed{B = 3}$

• $\bar{F}(0,1,1) = (4,4,3) = (\underbrace{g'(0)}_{4},\ \underbrace{4 \times 1\, g(0)}_{4},\ \underbrace{4 \times 0 \times 1 + 3}_{3 ✓}) \rightarrow g'(0) = 4$

$\underbrace{4\,g(0) = 4}_{g(0) = 1}$

$$\boxed{g(x) = 3\,\text{sen}(2x) - 2x + 1}$$

b) Con la g hallada calcular el flujo de $\bar{f}$ a través de la sup. $S: z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, con vectores normales con 3° componente +



T: tapa: disco en $z = 0$, $r = 2$

$S \cup T = S_F \Rightarrow \iint_S \bar{f}\,d\bar{s} + \underbrace{\iint_T \bar{f}\,d\bar{s}}_{\text{con } N = (0,0,-1)} = \oiint_{S_F} \bar{f}\,d\bar{s}$

W región de $\mathbb{R}^3$

S_F sup frontera de W

$\bar{f} \in C^1 \longrightarrow$ t. Gauss $\Rightarrow \oiint_{S_F} \bar{f}\,d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{f})\,d\text{vol}$

vol paraboloide → 1/2 vol cilindro que lo contiene

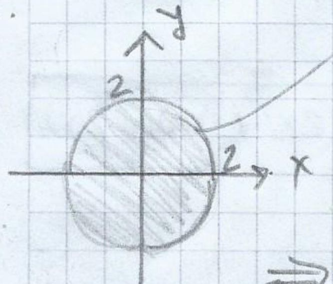
$$\oiint_{S_F} \bar{F}\, d\bar{s} = 4 \iiint_W dVol = 4 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{2} = 2\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 32\pi$$

$$\iint_T \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{T_{xy}} \bar{F}\, N\, dx\, dy = \iint_{T_{xy}} (6\cos(2x)-2,\ 4y(3\,sen(2x)-2x+k),\ 8xz+3)\,(0,0,-1)\, dx\, dy =$$

en $z=0$

$$= \iint_{S_{xy}} -8xz - 3\, dx\, dy \overset{z=0}{=} \iint_{S_{xy}} -3\, dx\, dy = -3 A_D =$$

$$= -3 \cdot \pi \cdot 2^2 \to \boxed{\iint_T \bar{F}\, d\bar{s} = -12\pi}$$

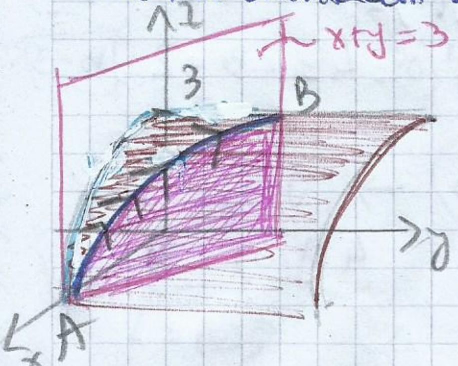


$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} + \iint_T \bar{F}\, d\bar{s} = \oiint_{S_F} \bar{F}\, d\bar{s}$$

$$\Rightarrow \iint_S \bar{F}\, d\bar{s} \underbrace{-12\pi}_{\text{flujo tapa}} = 32\pi \Longrightarrow \boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = 44\pi}$$

Ej 4) Calcular la circ. de $\bar{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$ a lo largo de C definida por la intersección de $S_1: x^2+z^2 = 9$, y $S_2: x+y = 3$, 1º octante

Indicar la orientación elegida



$$\begin{cases} x = r\cos(t) \overset{r=3}{=} 3\cos(t) \\ y = 3 - x = 3 - 3\cos(t) \\ z = 3\,sen(t) \qquad 0 \le t \le \pi/2 \end{cases}$$

$$\bar{\beta}(t) = (\overset{x}{3\cos(t)}, \overset{y}{3-3\cos(t)}, \overset{z}{3\,sen(t)})$$

$$\bar{\beta}'(t) = (-3\,sen(t), +3\,sen(t), 3\cos(t))$$

$$\int_C \bar{F}\, d\bar{l} = \int_0^{\pi/2} \bar{F}(\bar{\beta}(t))\, \bar{\beta}'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-3+3\cos(t), 3\cos(t), 3\,sen(t))(-3\,sen(t), 3\,sen(t), 3\cos(t))\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 9\,sen(t) - \cancel{9\cos(t)\,sen(t)} + \cancel{9\cos(t)\,sen(t)} + 9\,sen(t)\cos(t)\, dt =$$

$$= 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

$$\boxed{\int_C \bar{F}\, d\bar{l} = \frac{27}{2}}$$

NOTA